

MATHEMATIQUES

NB : L'utilisation de la calculatrice personnelle est autorisée, cependant son échange est strictement interdit.

EXERCICE N° 1 (4 pts)

Pour chacune des questions suivantes, une seule des trois réponses proposées est juste. Indiquer sur votre copie le numéro de la question et la lettre correspondante à la réponse choisie en justifiant le choix :

- 1) Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Alors :
- a. $M^2 = M$ b. $M^2 = I_2$ c. $M^2 = -M$
- 2) Si M est une matrice carrée d'ordre 3 tel que $M^3 = M + I_3$, alors $M^{-1} =$
- a. $M^3 - M$ b. $M^2 - M$ c. $M^2 - I_3$
- 3) Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ \alpha-1 & \alpha \end{pmatrix}$; où α est un réel. Alors :
- a. A est inversible pour toute valeur de α .
 b. A n'est pas inversible pour exactement une valeur de α .
 c. A n'est pas inversible pour exactement deux valeurs de α .
- 4) Si f est une fonction définie sur $[1, +\infty[$ vérifiant $9 - 3x^2 \leq x^2 f(x) \leq 11 - 3x^2$, alors
- a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 10$ b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ c. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -3$

EXERCICE N° 2 (4 pts)

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 + 2x - 3}{x - 1} & \text{si } x < 1 \\ \frac{10(x - \sqrt{x})}{x - 1} & \text{si } x > 1 \\ \lambda & \text{si } x = 1 \end{cases}$, où λ est un réel.

1) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

2) a) Vérifier que $x^3 + 2x - 3 = (x-1).(x^2 + x + 3)$ et que $\frac{10(x - \sqrt{x})}{x - 1} = \frac{10\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1}$

b) En déduire que f admet une limite en 1 et déterminer cette limite.

3) a) Si on prend $\lambda = 10$, f est elle continue en 1 ?

b) Que doit être la valeur de λ pour que f soit continue en 1 ?

4) Vérifier que pour tout $x > 1$, $f(x) = 10 - \frac{10}{\sqrt{x} + 1}$. En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

EXERCICE N° 3 (6 pts)

On donne ci-contre la courbe ζ d'une fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$.

-I- Par une lecture graphique :

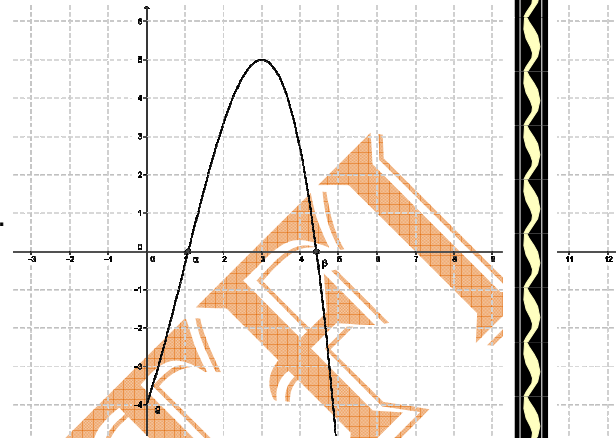
- 1) Donner $f(0)$.
- 2) Décrire les variations de f .
- 3) Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x)=0$.
- 4) Déterminer le réel x_0 où f atteint sa valeur maximale et déterminer cette valeur maximale.

-II- La fonction f est définie par $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x - 4$.

Une petite entreprise fabrique chaque mois x milliers d'objets et $f(x)$ modélise le bénéfice algébrique mensuel en milliers de dinars réalisé par l'entreprise .

(bénéfice = revenue – coût de fabrication – coût fixe)

- 1) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- 2) Justifier la continuité de f sur $[0 ; +\infty[$.
- 3) Montrer par le calcul que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions α dans $[1,2]$ et β dans $[4,5]$.
- 4) a) Déterminer le coût fixe en dinars.
b) Déterminer le nombre d'objets que l'entreprise doit fabriquer pour réaliser un bénéfice maximal.
- 5) On donne $\alpha \approx 1,0833$ et $\beta \approx 4,4216$.
 - a) Déterminer le nombre d'objets minimal que l'entreprise doit fabriquer pour qu'elle commence à réaliser un gain.
 - b) Déterminer le nombre d'objets maximal que l'entreprise doit fabriquer pour qu'elle évite la perte.



EXERCICE N° 4 (6 pts)

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & m & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & m \end{pmatrix}$ où m est un réel.

- 1) Montrer que le déterminant de M est $-2(m-2)^2$. En déduire les valeurs de m pour lesquels M est inversible.

2) Soit la matrice $N = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -4 & 4 & -2 \end{pmatrix}$.

Déterminer la valeur de m pour laquelle on a $M.N = 2.I_3$.

- 3) Dans toute la suite , on prend $m = 1$.
 - a) Calculer la matrice $M.N$.
 - b) En déduire la matrice M^{-1} inverse de M . Quelle est la matrice inverse de N ?

4) Un hôtel pratique trois tarifs différents pour un séjour de 24 heures :

- Le tarif x pour les enfants de moins de 12 ans.
- Le tarif y pour les enfants de 12 ans à 18 ans.
- Le tarif z pour les personnes de plus de 18 ans.

Trois familles ont passé un séjour de 24 heures dans cet hôtel.

- La famille Foulén, formée du père, de la mère et de 3 enfants d'âges 7, 10 et 15 ans ont payé 200 dinars.
- La famille Falten, formée du père, de la mère et de 5 enfants d'âges 4, 8, 13, 15 et 19 ans ont payé 290 dinars.
- La famille Leflen, formée de la mère et de 2 enfants d'âges 13 et 16 ans, ont payé 130 dinars.

- a) Traduire la situation précédente en un système d'équations (S).
- b) Donner l'écriture matricielle de (S).
- c) Déterminer les trois tarifs x , y et z .

